

华东交通大学考试专用答题纸(适用于匿名改卷)

课程: 7.1 向量及其运算

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

考生注意: 答题时应注明题号, 并按题号顺序答题。

题号	答题内容
P41	廖国勇
1	设 $a = \{1, -2, 3\}$, $b = \{-1, 1, 2\}$, 则 $3a - 2b = \{5, -8, 5\}$
2	已知向量 $a = \{1, -1, 2\}$ 与 $b = \{2, 3, \lambda\}$ 垂直, 则 $\lambda = \frac{1}{2}$ 解 $a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0 \Rightarrow 2 - 3 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$
3	向量 $a = \{4, -3, 4\}$, $b = \{2, 2, 1\}$, 则 $\text{Prj}_b a = 2$ 解 $\text{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{ b } = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} [4 \times 2 + (-3) \times 2 + 4 \times 1] = \frac{6}{3} = 2$
4	设 $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 5)$, 则与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量为 $\pm \overrightarrow{AB}^\circ = \pm (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 解: $\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 2)$ $ \overrightarrow{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ $\overrightarrow{AB}^\circ = \frac{\overrightarrow{AB}}{ \overrightarrow{AB} } = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 所以与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量为 $\pm \overrightarrow{AB}^\circ = \pm (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

P41

二 1

求与向量 $a = 2i - j + 2k$ 共线且满足 $a \cdot x = -18$ 的向量.解: 设向量 $x = Ca = (2C, -C, 2C)$ C 为常数

$$a \cdot x = (2, -1, 2) \cdot (2C, -C, 2C)$$

$$= 4C + C + 4C$$

$$= 9C = -18$$

$$\Rightarrow C = -2$$

$$\therefore x = (-4, 2, 4)$$

2 设 $a = \{2, -3, 1\}$, $b = \{1, -1, 3\}$, $c = \{1, -2, 0\}$, 求

$$(1) -(b \cdot c)a + (a \cdot c)b$$

$$(2) (a \times b) \times c$$

解 (1) $-(b \cdot c)a + (a \cdot c)b$

$$= -(1+2+0)(2, -3, 1) + (2+6+0)(1, -1, 3)$$

$$= (-6, 9, -3) + (8, -8, 24)$$

$$= (2, 1, 21)$$

$$(2) a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8i - 5j + k = (-8, -5, 1)$$

$$(a \times b) \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2i + j + 21k = (2, 1, 21)$$

注 拉格朗日公式

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

题号	答题内容	廖国勇
二 3	设 $a=i+j$, $b=-2j+k$, 求以 a, b 为边的平行四边形对角线的长度 解: $a+b = (1, -1, 1) = \sqrt{3}$ $a-b = (1, 3, -1) = \sqrt{11}$ 以 a, b 为边的平行四边形对角线的长度为 $\sqrt{3}, \sqrt{11}$	
4	指出非零向量 a, b 应分别满足什么条件能使下列各式成立。 (1) $a+b = a-b$ (2) $a+b < a-b$ (3) $a-b = a + b$ 解 $a+b ^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b$ $a-b ^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b$ (1) $a+b = a-b \Leftrightarrow a+b ^2 = a-b ^2$ $\Leftrightarrow a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b = a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ $\Leftrightarrow a \perp b$ (2) $a+b < a-b \Leftrightarrow a+b ^2 < a-b ^2$ $\Leftrightarrow a \cdot a + 2a \cdot b + b \cdot b < a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b \Leftrightarrow a \cdot b < 0$ $\Leftrightarrow a b \cos(\hat{a}, b) < 0 \Leftrightarrow a$ 与 b 的夹角为大于 90° (或 $\frac{\pi}{2}$) (3) $a-b = a + b \Leftrightarrow a-b ^2 = (a + b)^2$ $\Leftrightarrow a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b = a ^2 + b ^2 + 2 a b$ $\Leftrightarrow - a b \cos(\hat{a}, b) = a b$ $\Leftrightarrow \cos(a, b) = -1$ $\Leftrightarrow a$ 与 b 的夹角为 180° (或 π)	
注 1.	$a \cdot a = a ^2$ $a \cdot b = a b \cos(\hat{a}, b)$	
2	(2) 的参考答案是夹角为钝角, 钝角是不包含平角的, 故答案错误.	

题号

P142

5 已知向量 a 同时垂直向量 $b = \{3, 6, 8\}$, 及 x 轴, 且 $|a| = 2$, 求 a

解 设 a 向量为 $\{a_x, a_y, a_z\}$, 则依题意有

$$\begin{cases} a \cdot b = 3a_x + 6a_y + 8a_z = 0 \\ a \cdot i = a_x = 0 \\ \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{8}{5} \\ a_z = -\frac{6}{5} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{8}{5} \\ a_z = \frac{6}{5} \end{cases}$$

即 $a = (0, \frac{8}{5}, -\frac{6}{5})$ 或 $a = (0, -\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$

P143

6 已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的终点坐标为 $B(2, -1, 4)$, 且 $\overrightarrow{AB}$ 在 x, y, z 轴上的投影分别为 $-1, 3, 2$, 求起点 A 的坐标。

解 设 A 点的坐标为 (a_x, a_y, a_z) , 于是

$$\begin{cases} -a_x + 2 = -1 \\ -1 - a_y = 3 \\ 4 - a_z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = 3 \\ a_y = -4 \\ a_z = 2 \end{cases}$$

A 点坐标为 $A(3, -4, 2)$

题号	答题内容	廖国勇
P143		
7	已知 $\vec{OA} = i + 3k$, $\vec{OB} = j + 3k$, 求 $\triangle OAB$ 的面积. 解 以 OA, OB 为邻边的平行四边形面积为 $\vec{OA} \times \vec{OB}$ 于是, $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \vec{OA} \times \vec{OB}$ $= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $= \frac{1}{2} (-3, -3, 1) $ $= \frac{1}{2} \sqrt{19}$	
8	设 $a+3b$ 与 $7a-5b$ 垂直, $a-4b$ 与 $7a-2b$ 垂直, 求向量 a 与 b 的夹角. 解 $\begin{cases} (a+3b) \cdot (7a-5b) = 7a \cdot a + 16a \cdot b - 15b \cdot b = 0 & (1) \\ (a-4b) \cdot (7a-2b) = 7a \cdot a - 30a \cdot b + 8b \cdot b = 0 & (2) \end{cases}$ (1) - (2) 得 $48a \cdot b - 23b \cdot b = 0$ $\Rightarrow 48 a b \cos(\hat{a}, b) = 23 b b $ $\Rightarrow 2 a \cos(\hat{a}, b) = b $ (注, 这里还说明 $\cos(\hat{a}, b) \geq 0$) 把 $b = 2 a \cos(\hat{a}, b)$ 代入 (1), 注意 $a \cdot a = a ^2$ $b \cdot b = b ^2$ 有 $7 a a + 16 a \cos(\hat{a}, b) \cdot 2 a \cos(\hat{a}, b) - 15 \cdot [2 a \cos(\hat{a}, b)]^2 = 0$ 化简 $7 + 32\cos^2(\hat{a}, b) - 60\cos^2(\hat{a}, b) = 0$ $\Rightarrow \cos(\hat{a}, b) = \pm \frac{1}{2} \quad \cos(\hat{a}, b) = \frac{1}{2} \text{ 舍去}$ 于是 a 与 b 的夹角为 $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$	

题号

P144 P144

答 题 内 容

廖国勇

二 9 设 $a = \{1, -1, 1\}$, $b = \{3, -4, 5\}$, $c = a + \lambda b$, 问 λ 取何值时, $|c|$ 最小? 并证明当 $|c|$ 最小时, $c \perp b$.

$$\begin{aligned}\text{解 } |c| &= \sqrt{c \cdot c} = \sqrt{(a + \lambda b) \cdot (a + \lambda b)} \\ &= (a \cdot a + 2\lambda a \cdot b + \lambda^2 b \cdot b)^{1/2} \\ &= (3 + 24\lambda + 50\lambda^2)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\text{设 } f(\lambda) = |c|^2 = 50\lambda^2 + 24\lambda + 3 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$f'(\lambda) = 100\lambda + 24 \quad \text{令 } f'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{6}{25}$$

$$f''(\lambda) = 100 > 0$$

所以 $\lambda = -\frac{6}{25}$ 时, $f(\lambda)$ 取极小值, 由于 $\lambda = -\frac{6}{25}$ 为 $f(\lambda)$ 的唯一驻点, $f(-\frac{6}{25})$ 就是最小值点, 此时 $|c|$ 也最小, 即 $\lambda = -\frac{6}{25}$ 时, $|c|$ 为最小值

下面证明 $c \perp b$

$$\begin{aligned}b \cdot c &= b \cdot (a - \frac{6}{25}b) \\ &= a \cdot b - \frac{6}{25} b \cdot b \\ &= 12 - \frac{6}{25} \cdot 50 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore c \perp b$$

题号

P44 P44

答 题 内 容

廖国勇

二 10

已知 $|a|=6$, $|b|=3$, $|c|=3$, a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, $c \perp a$, $c \perp b$, 求 $[a, b, c]$

$$\text{解 } [a, b, c] = (a \times b) \cdot c$$

$$\text{由于 } c \perp a, c \perp b \Rightarrow c \parallel (a \times b)$$

$$\text{于是 } [a, b, c] = \pm |a \times b| |c|$$

$$= \pm 3 |a \times b|$$

$$= \pm 3 \cdot |a| |b| \sin(\hat{a, b})$$

$$= \pm 3 \times 6 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \pm 27$$

注 $(a \times b) \perp a$, $(a \times b) \perp b$

由于 $c \perp a$, $c \perp b$, 可得 $(a \times b)$ 与 c 平行, 即 $a \times b$ 与 c 的夹角为 0 或 π

$$(a \times b) \cdot c = |a \times b| |c| \cdot \cos(\hat{a \times b, c})$$

$$= \begin{cases} |a \times b| |c| & \text{夹角为 } 0 \\ -|a \times b| |c| & \text{夹角为 } \pi \end{cases}$$

三 试证 $p = b - \frac{(a \cdot b)a}{|a|^2}$ 与 a 垂直

$$\text{证明 } p \cdot a = \left[b - \frac{1}{|a|^2} (a \cdot b) \cdot a \right] \cdot a$$

$$= b \cdot a - \frac{a \cdot b}{|a|^2} a \cdot a$$

$$= b \cdot a - a \cdot b = 0$$

$$\therefore p \perp a$$